

SUITES NUMÉRIQUES

1. Définition

1.1. Définition

Une suite numérique est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

La notation (u_n) désigne la suite et u_n désigne l'image de l'entier n (appelé encore terme d'indice n de la suite (u_n)).

2. Sens de variation (ou monotonie) d'une suite

2.1. Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

La suite (u_n) est croissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.

La suite (u_n) est décroissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.

La suite (u_n) est monotone (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0 .

La suite (u_n) est stationnaire (ou constante à partir du rang n_0) lorsque $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemples (voir cours)

3. Suite majorée, suite minorée, suite bornée

3.1. Définition

Une suite (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier n .

Une suite (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que $m \leq u_n$ pour tout entier n .

Une suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée.

Exemples (voir cours)

4. Suite convergente

4.1. Définition

On dit qu'une suite est convergente vers un réel ℓ (ou admet une limite finie ℓ) lorsque tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque : mathématiquement, une suite (u_n) admet une limite finie ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Autrement dit :

Pour tout réel ε strictement positif, il existe un certain rang N tel qu'à partir de ce rang on ait : $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$

Autrement dit :

Tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. Heureusement, nous disposons de théorèmes (voir ci-dessous) pour prouver la convergence d'une suite dont l'emploi est bien plus aisé que cette définition.

Il existe des suites qui ne convergent pas (on dit alors qu'elles divergent). Il y en a de deux types :

Celles qui ont une limite infinie : par exemple $u_n = n$.

Celles qui n'ont pas de limite : par exemple $u_n = (-1)^n$. ($u_{2p} = 1$ et $u_{2p+1} = -1$)

4.2.2. Suites récurrentes

On applique le théorème suivant :

Théorème (convergence monotone) :

1. Toute suite croissante et majorée converge.
2. Toute suite décroissante et minorée converge.

Démonstration : hors-programme (propriété de la borne supérieure)

Exemples (voir cours)

Notons que le théorème n'indique pas vers quel réel la suite converge. (Ce réel est parfois très difficile à déterminer). On a cependant la propriété suivante :

Si f est continue et si (u_n) est une suite récurrente définie par :
$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Alors, sa limite éventuelle ℓ est nécessairement solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemples d'utilisation du théorème :

- La suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, pour $n \geq 1$ est croissante et majorée donc convergente. (Sa limite est difficile à déterminer, elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$)
- La suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est croissante et majorée donc convergente. On montrera que sa limite est le nombre e .

5. Cas des suites du type $u_n = a^n$ (suites géométriques de raison a et de premier terme $u_0 = 1$)

5.1. Théorème

La suite (u_n) définie par $u_n = a^n$ possède les propriétés suivantes :

- si $a > 1$, alors (u_n) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$
- si $a = 1$, alors (u_n) est constante et converge vers 1
- si $0 < a < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante et converge vers 0
- si $a = 0$, alors (u_n) est constante et converge vers 0
- si $-1 < a < 0$, alors (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante (les signes alternent) mais (u_n) converge vers 0
- si $a \leq -1$, alors (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante (les signes alternent) et (u_n) diverge (pas de limite).

5.2. Généralisation : limite de la somme des termes d'une suite géométrique :

Soit $q \in]-1 ; +\infty[$. Alors :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n q^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1 \end{cases}$$

Pour le démontrer, il suffit d'écrire que :
$$\sum_{p=0}^n q^p = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
 puis d'utiliser le théorème 1.

Exercice : démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1[$:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n (-x^a)^p = \frac{1}{1 + x^a}$$

6. Croissances comparées des suites $(\ln n)$; (n^α) ; (a^n)

Motivation : on considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{1,15^n}{n^2}$.

- Calculer u_0, u_1, \dots, u_{10} . Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
- Calculer u_{25} et u_{50} . La conjecture faite en a) est-elle correcte ?
- Calculer $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe. En déduire que pour $n \geq 13$, la suite (u_n) est croissante.

6.1. Théorème

Pour tout réel $\alpha > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\ln n} = +\infty$

Pour tous réels $a > 1$ et $\alpha > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

Pour tout réel a tel que $0 < a < 1$ et tout réel α : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = 0$

Démonstration : (voir cours)

7. Récurrence double

Exemple: soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$; $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \geq 0$.

Démontrer que $u_n = 2^n$ pour tout entier n .

On vérifie que la propriété est vraie pour u_2 et u_3 : $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 10 - 6 = 4 = 2^2$; $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 20 - 12 = 8 = 2^3$

On suppose que $u_n = 2^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1}$. Montrons qu'alors $u_{n+2} = 2^{n+2}$:

Généralisation : étude des suites récurrentes d'ordre 2 à coefficients réels :

Ce sont les suites définies par :
$$\begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Méthode : on résout l'équation caractéristique : $r^2 = ar + b$.

- Si elle admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 , alors : $u_n = A(\lambda_1^n) + B(\lambda_2^n)$
- Si elle admet une racine double λ , alors : $u_n = (An + B)(\lambda^n)$
- Si elle admet deux racines complexes conjuguées $\lambda = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\theta}$ alors :

$$u_n = A \rho^n \cos(n\theta) + B \rho^n \sin(n\theta)$$

Les constantes A et B se déterminent à l'aide de u_0 et u_1 .

8. Suites adjacentes

8.1. Définition

On dit que deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque :

- (a_n) est croissante
- (b_n) est décroissante
- la suite $(b_n - a_n)$ est positive et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$

8.2. Théorème

Si deux suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes (avec $a_n \leq b_n$) alors elles convergent et ont même limite ℓ .

De plus, pour tout n on a : $a_n \leq \ell \leq b_n$.

Démonstration : (voir cours)