

Logique

Exercices

1) Traduire en langage ordinaire les phrases logiques suivantes.

- a) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists m \in \mathbb{N}) m > n$.
- b) $(\exists m \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) m > n$.
- c) $(\forall x \in \mathbb{Q}) (\forall z \in \mathbb{Q}) (\exists y \in \mathbb{Q}) x < y < z$.
- d) $(\forall n \in \mathbb{N}) n > 3 \implies n > 6$.
- e) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists m \in \mathbb{N}) m \leq n$.
- f) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists p \in \mathbb{N}) n = 2p + 1$.
- g) $(\forall x \in \mathbb{R}) x < 2 \implies x^2 < 4$.

2)

Écrire en utilisant le langage de la logique la négation de chacune des propositions de l'exercice 1.

3) Parmi les phrases des exercices 1 et 2, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses? On justifiera les réponses.

4) Écrire en utilisant le langage de la logique les phrases suivantes.

- a) Le carré de tout nombre réel est positif.
- b) Un nombre entier divisible par 10 est divisible par 5.
- c) Il existe un nombre impair divisible par 2.
- d) Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement si ces deux nombres réels sont de même signe.
- e) Les deux seules solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3.

5) Les propositions de l'exercice 4 sont-elles vraies?

6) Construire les tables de vérité des propositions suivantes.

- a) A ou B .
- b) A et non(B).
- c) $A \implies B$.
- d) non(A) \implies non(B).
- e) non(B) \implies non(A).
- f) non(A ou B).

7) a) Montrer que $(1 = 2) \implies (1 = 3)$.

b) Montrer que $(1 = 2) \implies (2 + 2 = 4)$.

c) Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse?

1. $1 = 2$.

2. $1 = 3$.

3. $(1 = 2) \implies (1 = 3)$.

8) Il faut employer correctement les phrases « il faut que » et « il suffit que ». Utiliser ces phrases pour traduire en langage courant chacune des propositions suivantes.

- a) $A \implies B$.
- b) $B \leftarrow C$.
- c) $A \iff B$.
- d) $(A \implies B) \implies C$.

Donner un exemple pour chacune de ces propositions.

9) Prouver les propriétés suivantes par récurrence.

a)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2.$$

c)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1.$$

10) Soit x un réel strictement positif. Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+x)^n > 1+nx$?

11) Montrer que dans l'exercice 11, on peut déduire la question 9.b de la question 9.a sans récurrence.

12) Écrire la contraposée des implications suivantes et les démontrer (n est un entier naturel, x et y sont des réels).

a) n est premier $\implies n = 2$ ou n est impair.

b) $xy \neq 0 \implies (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.)$

c) $x \neq y \implies [(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)].$

13) Prouver l'assertion

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad |a| < \varepsilon) \implies (a = 0).$$

14) En raisonnant par l'absurde, montrer que si un entier $q > 1$ divise l'entier $n > 0$, alors q ne divise pas $n+1$.

15) On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. Le but de cet exercice est de montrer que cet ensemble est infini.

a) On suppose que \mathcal{P} est fini, il existe donc p_1, \dots, p_n tels que $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Montrer que pour tout i , p_i ne divise pas $(p_1 \cdots p_n)! + 1$. [On utilisera l'exercice 14].

b) Conclure.