

SUITES NUMÉRIQUES

I. L'ensemble des suites réelles

1. Définition d'une suite

On appelle suite réelle toute application d'une partie de \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} et on note $(U_n)_n$ ou $(V_n)_n$ en général.

Vocabulaire :

L'ensemble des suites réelles sera noté par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Opérations algébriques

a) Egalité

Soient (U_n) et $(V_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que les suites sont égales et on note : $(U_n) = (V_n)$ ssi : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n = V_n$

Exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = \cos(n\pi) \text{ et } V_n = (-1)^n$$

On a $\forall n \in \mathbb{N} : \cos(n\pi) = (-1)^n$ donc $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = V_n$ alors : $(U_n) = (V_n)$

b) Addition

Soient (U_n) et $(V_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La suite $(W_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n : W_n = U_n + V_n$ est appelée la suite somme de (U_n) et (V_n) et on note : $(W_n) = (U_n + V_n)$.

Exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = n^2 + 1 \text{ et } V_n = 2n$$

On a donc : $W_n = U_n + V_n = n^2 + 1 + 2n = (n+1)^2$ alors : $W_n = (n+1)^2$

c) Produit

Soient (U_n) et $(V_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la suite $(W_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n : W_n = U_n \cdot V_n$ est appelée la suite produit de (U_n) et (V_n) et on note :

$$(W_n) = (U_n \cdot V_n)$$

Exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = (n+1)^2 \text{ et } V_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

On a : $W_n = U_n \cdot V_n = (n+1)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = (n+1) \cdot \sqrt{n+1}$ alors : $W_n = (n+1) \cdot \sqrt{n+1}$

d) Produit par un scalaire

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (W_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : W_n = \lambda U_n$ sera noté : (λU_n)

3. Suite minorée - majorée - bornée

Définition :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que (U_n) est majorée (respectivement minorée) ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq M \text{ (respectivement } M \leq U_n).$$

On dit que (U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = \sin(n^4 + 3n^3 + 5).$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq \sin(n^4 + 3n^3 + 5) \leq 1$ (Propriété de la fonction \sin)

Alors $\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq U_n \leq 1$, c'est-à-dire que (U_n) est bornée.

Proposition :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, (U_n) est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall n \in \mathbb{N} : |U_n| \leq M.$$

4. Suite croissante - décroissante - monotone

Définition :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que :

(U_n) est croissante (resp. strictement croissante) ssi : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq U_{n+1}$ (resp. $U_n < U_{n+1}$)

(U_n) est décroissante (resp. strictement décroissante) ssi : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq U_{n+1}$ (resp. $U_n > U_{n+1}$)

(U_n) est monotone ssi elle est croissante ou décroissante.

(U_n) est strictement monotone ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple :

$$\text{Soit } (U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} : U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Donc (U_n) est croissante. (Même strictement croissante)

II. Notions de suites convergentes

1. Définition et propriétés de la convergence

Définitions :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que (U_n) converge vers l ssi :

$$(\forall \epsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq \epsilon$$

Si une suite ne converge pas, on dit alors qu'elle diverge.

Vocabulaire - Notation :

l est appelé limite de la suite (U_n) et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ ou $\lim U_n = l$.

Théorème :

Si la suite (U_n) converge vers une limite l , cette limite l est unique.

Proposition :

Toute suite convergente est bornée.

Remarque :

La réciproque est fautive en général.

Exemple :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} : U_n = (-1)^n$

(U_n) est bornée mais pas convergente.

2. Opérations sur les limites

Théorème :

Soient (x_n) et (y_n) deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soient l et $l' \in \mathbb{R}$, tq : (x_n) converge vers l et (y_n) converge vers l' , alors on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ la suite } (x_n + \lambda y_n) \text{ est convergente et on a : } \lim (x_n + \lambda y_n) = l + \lambda l' = \lim x_n + \lambda \lim y_n.$$

La suite $(x_n \cdot y_n)$ est convergente et on a : $\lim (x_n \cdot y_n) = l \cdot l' = \lim x_n \cdot \lim y_n$.

Si $l' \neq 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N : y_n \neq 0$, de plus, dans ce cas, la suite $(\frac{x_n}{y_n})$ est convergente et on a : $\lim (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{l}{l'} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Théorème :

Soient $(x_n), (y_n)$ et (z_n) trois suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq : $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \leq x_n \leq z_n$.

Si $\lim y_n = \lim z_n = l \in \mathbb{R}$, alors (x_n) converge aussi vers l .

3. Convergence des suites monotones

Théorème fondamental :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante, (U_n) converge ssi elle est majorée, et on a, dans ce cas : $\lim U_n = \text{Sup}(U_n)$

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante, (U_n) converge ssi elle est minorée, et on a, dans ce cas : $\lim U_n = \text{Inf}(U_n)$

Corollaire :

Toute suite croissante négative est convergente.

Toute suite décroissante positive est convergente.

Définition :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que (U_n) tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) ssi : $(\forall A > 0), (\exists N \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \Rightarrow U_n \geq A$ (resp : $U_n \leq -A$), et on note : $\lim U_n = +\infty$ (resp $-\infty$).

Proposition :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si (U_n) est croissante et non majorée alors : $\lim U_n = +\infty$.

Si (U_n) est décroissante et non minorée alors : $\lim U_n = -\infty$.

Proposition :

Soient (U_n) et $(V_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq V_n$

Si $\lim U_n = -\infty$ alors $\lim V_n = -\infty$.

Si $\lim V_n = +\infty$ alors $\lim U_n = +\infty$.

III. Suites extraites - Suites adjacentes

1. Suites extraites

Définition :

Soient (U_n) et $(V_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que (V_n) est une suite extraite de (U_n) ssi : $\exists \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tq :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_{\psi(n)} \text{ et on appelle } \psi \text{ une extractrice.}$$

Exemple :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq : $U_n = (-1)^n$ et soient : $\psi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $\psi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \rightarrow 2n \quad \text{et} \quad n \rightarrow 2n+1$$

(V_n) et (W_n) sont extraites de (U_n) tq : $V_n = U_{\psi_1(n)} = U_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $W_n = U_{\psi_2(n)} = U_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$

Proposition :

Soit ψ une extractrice alors : $\forall n \in \mathbb{N} : \psi(n) \geq n$

Proposition :

Toute suite extraite d'une suite bornée est bornée.

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite.

Alors si on trouve que deux suites extraites ne convergent pas vers la même limite, alors la suite "mère" n'est pas convergente (diverge).

Exemple : dans l'exemple précédent,

$\lim V_n = 1$ et $\lim W_n = -1$, alors (V_n) et (W_n) ne convergent pas vers la même limite ($1 \neq -1$), ce qui montre que (U_n) diverge.

Théorème de Bolzano - Weierstrass réel :

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

2. Suites adjacentes

Définition :

Soient (U_n) et $(V_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit qu'elles sont **adjacentes** si l'une est croissante et l'autre est décroissante et $\lim (U_n - V_n) = 0$

Proposition :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites adjacentes tq : (U_n) croissante et (V_n) décroissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq V_n.$$

Théorème :

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

IV. Suite de Segments Emboîtés

Définitions :

Un segment est tout intervalle fermé et borné de la forme $[a, b]$ ($a < b$).

Soit (I_n) une suite de segments, on dit que cette suite est emboîtée ssi : $(\forall n \in \mathbb{N}) : I_{n+1} \subset I_n$.

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, (I_n) est une suite de segments emboîtés car $\forall n \in \mathbb{N}^* [0, \frac{1}{n+1}] \subset [0, \frac{1}{n}]$.

Proposition :

Soit $(I_n) = ([a_n, b_n])$ une suite de segments, on a : (I_n) est emboîté $\Leftrightarrow ((a_n)$ croissante et (b_n) décroissante).

Théorème des segments emboîtés :

Soit $(I_n) = ([a_n, b_n])$ une suite de segments emboîtés tq $\lim(b_n - a_n) = 0$, alors il existe un $c \in \mathbb{R}$ tq : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{c\}$

V. Suites récurrentes

1. Suite arithmético-géométrique

Définition :

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que (U_n) est arithmético-géométrique ssi : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^* - \{1\} \times \mathbb{R}^*$ tq :

$$U_0 \in \mathbb{R}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = aU_n + b$$

Remarque :

Si $a = 1$: (U_n) est arithmétique, et si $b = 0$: (U_n) est géométrique.

Proposition :

(U_n) converge ssi : $|a| < 1$, et dans ce cas : $\lim U_n = \frac{b}{1-a}$

2. Suites récurrentes linéaires du 2e ordre

Définition :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la suite (U_n) définie par :

$$(U_0, U_1) \in \mathbb{R}^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} + aU_{n+1} + bU_n = 0$$

est appelée suite récurrente linéaire du 2e ordre, et l'équation $x^2 + ax + b = 0$ ($x \in \mathbb{C}$) est appelé équation caractéristique qu'il faut résoudre pour trouver (U_n) en fonction de n .

Théorème :

Soit $x^2 + ax + b = 0$ l'équation caractéristique et $\Delta = a^2 - 4b$.

- Si $\Delta > 0$: l'équation admet 2 racines réelles r_1 et r_2 tq : $U_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0$: l'équation admet une racine double réelle r tq : $U_n = (\alpha n + \beta) r^n$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0$: l'équation admet deux racines conjuguées : $r_1 = r e^{i\theta}$ et $r_2 = r e^{-i\theta}$ tq : $U_n = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

3. Suite récurrente : cas général

Définition :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$, la suite (U_n) définie par :

$$U_0 \in I$$

$$\forall n U_{n+1} = f(U_n) \text{ est appelé suite récurrente.}$$