# Applications linéaires

1. **Définition** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le même corps K. Une application $f$ est une **application linéaire** si :

   1. pour tous $u$ et $v$ dans $E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ ;
   2. pour tous $u$ dans $E$ et $\lambda$ dans K, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

   **Cas particuliers.** Soit $f$ une application linéaire.

   - Si $F$ est le corps $K$, on dit que $f$ est une **forme linéaire** sur $E$.
   - Si $E = F$, on dit que $f$ est un **endomorphisme** de $E$.
   - Si $f$ est bijective, on dit que $f$ est un **isomorphisme** de $E$ dans (ou sur) $F$.
   - Si $f$ est bijective et $E = F$, on dit que $f$ est un **automorphisme** de $E$.

   On note $L(E,F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de $E$ dans $F$. Si $E = F$, on note $L(E,F) = L(E)$.

2. **Propriétés**

   Proposition Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le corps $K$ et $f$ une application linéaire. Alors :

   1. $f(0) = 0$ et pour tout $u \in E$, $f(-u) = -f(u)$.
   2. Pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ dans $K$ et $u_1, u_2, \dots, u_n$ dans $E$, on a :
   $$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_n f(u_n)$$
   3. Si $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de $F$

   Proposition (définition équivalente d'application linéaire) Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le corps $K$. Une application $f : E \to F$ est une application linéaire si et seulement si

   pour tous $u$ et $v$ dans $E$ et $\lambda \in K$, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

   **Exercice.** Considérons l'application linéaire $f : \mathrm{IR}^3 \to \mathbb{R}^3$, telle que

   $f(-9,-6,-1) = (40,-7,-40)$ $f(-7,1,8) = (-23,-53,21)$ $f(-8,5,7) = (-55,-28,27)$

   Calculez l'image par $f$ du vecteur v=(-7,4,6).

   **Exemples**

   - Pour tout $K$-ev $E$, les applications $id_E$ et $0_E$ de $E$ dans $E$ définies pour $u \in E$ par :

     $id_E(u) = u$ et $0_E(u) = 0$

     sont des applications linéaires de $E$ dans $E$, donc des endomorphismes de $E$. On appelle $id_E$ l'application **identique** ou **identité** de $E$, $id_E$ est un automorphisme de $E$. On appelle $0_E$ l'application **nulle** de $E$ (malgré la notation, ne pas confondre avec l'élément neutre de $E$ ), $0_E$ n'est pas un automorphisme de $E$.
   - L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f((x,y,z)) = 5x -2y + 5z$, est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
   - L'application $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f((z_1 , z_2)) = (z_2 , 0)$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$.
   - L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (y,x)$, est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3. **Noyau et image**

   Proposition et définition : Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le corps $K$ et $f$ une application linéaire.

   1. L'ensemble $Ker\ f = \{u \in E, f(u) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$, appelé le **noyau** de $f$.
   2. L'ensemble $Im\ f = f(E) = \{f(u), u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de $F$, appelé l'**image** de $f$.

## 4. Injectivité, surjectivité

Proposition : Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le corps $K$ et $f$ une application linéaire.

1. $f$ est injective si et seulement si $Ker\ f = \{0\}$.
2. $f$ est surjective si et seulement si $Im\ f = F$.
3. $f$ est un isomorphisme si et seulement si $Ker\ f = \{0\}$ et $Im\ f = F$.

Proposition et définition : Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le corps $K$ et $f$ une application linéaire. On suppose que $E$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une base de $E$. Alors $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ est une suite génératrice de $Im\ f$. Par conséquent le sous-espace $Im\ f$ est de dimension finie. On appelle **rang** de $f$, et on note rang($f$), la dimension de $Im\ f$

.

## 5. Bases et propriétés d'une application linéaire

Proposition : Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le corps $K$ et $f$ une application linéaire. Supposons que $E$ est de dimension finie $n$ non nulle et que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une base de $E$.

1. $f$ est injective si et seulement si $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ est une suite libre de $F$.
2. $f$ est surjective si et seulement si $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ engendre $F$.
3. $f$ est un isomorphisme si et seulement si $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ est une base de $F$.

**Exemple :** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f((x,y,z)) = (2x + y - z, y - z, a z)$. Soient $b \in \mathbb{R}$ et $P$ le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + b z = 0$. On veut déterminer, suivant les valeurs de $a$ et $b$, le sous-espace vectoriel $f(P)$ de $\mathbb{R}^3$

. Déterminons une base de $P$

. Les vecteurs $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-b, 0, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $P$, donc $(u,v)$ est une base de $P$. D'après la proposition, $(f(u), f(v))$ est une suite génératrice de $f(P)$. Il y a plusieurs cas :

- soit $a$ est non nul
- soit $a$ est nul

**Exercice.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x, y, z) = (4x+3y+2z, 3x+y+6z, 5x+2y+2z)$$

et soit $P$ le sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $v_1 = (3,3,7)$ et $v_2 = (3,6,7)$.

Trouver l'image de $P$ par $f$

Exercices

# Applications linéaires

**Exercice 1** Déterminer si les applications suivantes sont linéaires.

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+3y, 3x-5y) \end{array} \right. \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (|x|, y, 0) \end{array} \right.$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x^2, -x) \end{array} \right. \qquad f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+1, x-y) \end{array} \right.$$

**Exercice 2** (1) On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y+z \\ x-y+z \\ 3x+y+2z \\ -x+y+3z \end{pmatrix}. \end{array}$$

Montrer que $f$ est une application linéaire. Est-elle surjective ? Montrer qu'elle est injective, et donner une base de son image.

(2) On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x+y+2z-t \\ x-y+z+4t \end{pmatrix}. \end{array}$$

Montrer que $g$ est une application linéaire. Est-elle injective ? Montrer qu'elle est surjective, et donner une base de son noyau.

(3) On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} h : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y, -3x+3y, 0). \end{array}$$

Montrer que $h$ est une application linéaire qui n'est ni injective ni surjective. Donner une base de son noyau, et une base de son image.

**Exercice 3** On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x+3y+z \\ 2x+3y-z \\ 4x-y+3z \end{pmatrix}. \end{array}$$

Montrer que $f$ est un isomorphisme, et déterminer son inverse.

**Exercice 4** On considère les applications

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, x-z) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 3x-y, x+y) \end{array} \right. .$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

**Exercice 5** Soit $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par

$$\begin{cases} f(e_1) &= -e_2 + e_3 - e_4 \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= e_1 + e_4 \\ f(e_4) &= e_2 - e_3 + e_4 \end{cases}.$$

Déterminer $f^2 = f \circ f$. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

**Exercice 6** Soit $g$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$g(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \quad g(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, \quad g(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(1) Donner la matrice de $g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(2) Démontrer que $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid g(u) = u\}$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid g(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et déterminer leur dimension.
(3) Montrer que $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $g$ est diagonale, avec des 1 et des $-1$ sur la diagonale.

**Exercice 7** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(1) Donner la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer que $f^3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
(3) Démontrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.
(4) Montrer que $G = \{f(u) - u \mid u \in \mathbb{R}^3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer sa dimension.

**Exercice 8** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f : E \to E$ une application linéaire. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(a) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$
(b) $f^2 = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}(f)$.

**Exercice 9** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
(1) À quelle condition sur $F$ et $G$ existe-t-il un endomorphisme $f$ de $E$ tel que $f(F) = G$ ?
(2) À quelle condition peut-on choisir un $f$ comme dans (1) qui est un isomorphisme ?

**Exercice 10** On considère une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant à la relation

$$u^2 - 3 \cdot u + 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = 0,$$

où $u^2 = u \circ u$ comme d'habitude. On pose $E_1 = \ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $E_2 = \ker(u - 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
($a$) Montrer que $u^2 - 3 \cdot u + 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = (u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (u - 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = (u - 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
($b$) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, les vecteurs $u(x) - x$ et $u(x) - 2x$ appartiennent à $E_2$ et $E_1$ respectivement.
($c$) En utilisant ($b$), démontrer que $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$
($d$) Démontrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, et que la somme $E_1 + E_2$ est directe.
($e$) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale, avec des 1 et des 2 sur la diagonale. Discuter du nombre de 1 et de 2 en fonction des dimensions respectives de $E_1$ et $E_2$.